На правах рукописи

ГОЛУБЦОВА Анастасия Андреевна

Точные решения в теориях гравитации и супергравитации и сохраняющиеся суперсимметрии

Специальность 01.04.02 — теоретическая физика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2013

Работа выполнена в Учебно-научном институте гравитации и космологии Российского университета дружбы народов.

Научный руководитель: доктор физ.-мат. наук,
Иващук Владимир Дмитриевич

Официальные оппоненты: доктор физ.-мат. наук, профессор
Гальцов Дмитрий Владимирович;
(МГУ, Москва)

доктор физ.-мат. наук,
Ахмедов Эмиль Тофик оглы
(ИТЭФ, Москва)

Ведущая организация: ГОУ ВПО "Томский государственный педагогический университет"

Защита диссертации состоится 6 июня 2013 г. в 15 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета совета Д 212.203.34 при Российском университете дружбы народов по адресу: 115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, зал №1.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Российского университета дружбы народов (РУДН) по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6.

Автореферат разослан “___” апреля 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.203.34
кандидат физико-математических наук В.А. Попова

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Классические решения различных теорий супергравитации играют важную роль во многих исследованиях непертурбативных теорий суперструн и М-теории, а также в исследованиях соответствий между моделями супергравитации и калибровочных теорий. Особый интерес представляют решения многомерных теорий супергравитации, называемые p–бранами. Такие решения описывают протяженные объекты, обладающие внутренним натяжением и зарядами по отношению к антисимметричным формам различных рангов. При определенном соотношении между данными параметрами, представляющем собой обобщенное БПС-условие (условие Богомольного-Прасада-Соммерфильда), эти объекты сохраняют часть исходной суперсимметрии, что предохраняет их от разрушения за счет квантовых поправок. Доля сохраняющихся суперсимметрий является инвариантом супергравитационного фона, который играет ключевую роль в исследованиях дуальности теории струн. Важным приложением бранных решений является то, что они могут быть использованы для изучения квантовых свойств черных дыр.

Также решения супергравитационного происхождения представляют собой мощное средство в квантовой теории поля. Наиболее значительным примером является AdS/CFT соответствие, которое предсказывает, что теория струн/М-теория на некоторых супергравитационных фонах, включающих AdS фактор-пространства, эквивалентна конформно инвариантной квантовой теории поля.

Ввиду нелинейной структуры уравнений Эйнштейна, наличия скалярных полей и полей форм, нахождение и исследование решений в теориях супергравитации является нетривиальной задачей.

Цель работы

Целью данной работы является получение и исследование новых решений, определенных на произведении риччи-плоских пространств, возникающих в теориях супергравитации, в том числе суперсимметричных. Нахождение соотношений для подсчета доли суперсимметрий, сохранямых конфигурациями из трех ортогонально пересекающихся бран в теории 11-мерной $\mathcal{N} = 1$ супергравитации. Поиск общих решений супергравитационного происхождения, определенных на произведении эйнштейновых фактор-пространств, выделение и исследование сферически-симметричных решений. Поиск и исследование точных решений, связанных с алгебрами Ли, в моделях супергравитационного типа.

Научная новизна

В диссертационной работе впервые решены следующие задачи:

1. Найдены новые суперсимметричные конфигурации из трех пересекающихся $M2$- и $M5$-бран в теории 11-мерной супергравитации, заданные на произведении риччи-плоских многообразий. Для этих конфигураций получены соотношения для вычисления дробных чисел суперсимметрий. Среди полученных конфигураций — примеры с различными риччи-плоскими и плоскими с нетривиальной топологией фактор-пространствами: многообразием типа pp-волны, многообразиями Калаби-Яу, $\mathbb{C}^2_*/Z_2$ и $\mathbb{R}^{1,1}_*/Z_2$. Такие решения не могут быть описаны классификацией Бергсхоефа и соавторов, полученной для топологически тривиальных плоских фактор-пространств $M_i = \mathbb{R}^{d_i}$.

2. Для обобщенной p-бранной модели, включающей n полей форм и l скалярных полей, построен класс решений флаксбранного типа, обобщающих решение Мелвина и соответствующих алгебрам Ли; написана программа для вычисления управляющих полиномиальных функций. Выделен подкласс космологических решений, соответствующих алгебрам Ли ранга 3 и описывающих ускоренное расширение 3-мерного подпространства, совместимое с достаточно малым значением вариации эффективной гравитационной постоянной.

3. Показано, что в пространстве произвольной размерности $D \geq 3$ решения космологического типа для гравитационной модели с нелинейным сигма-модельным источником, заданной на произведении фактор-пространств Эйштейна, определены решениями уравнений геодезических для пространства-мишени σ-модели. Получены решения космологического типа, когда: 1) все фактор-пространства являются риччи-плоскими; 2) одно из фактор-пространств имеет ненулевую кривизну, а остальные являются риччи-плоскими; 3) модель рассматривается в контексте 4-мерной обобщенной теории Бранса-Дикке и присутствуют три скалярных поля, неуниверсально связанные с гравитацией. Для сферически-симметричных решений при $D \geq 4$, определенных на произведении пространства $\mathbb{S}^{d_1}$, $d_1 > 1$, и нескольких риччи-плоских фактор-пространств, сформулирована и доказана теорема об "отсутствии волос".

Научная и практическая значимость.

Работа носит теоретический характер. Полученные соотношения для дробных чисел суперсимметрий представляют интерес для исследования суперсимметричных решений, определенных на произведении риччи-плоских многообразий, которые возникают в теориях супергравитации типа IIA и IIB, а также их редукциях в низшие измерения. Также, результаты исследования могут иметь значение для анализа суперконформных моделей, возникающих в рамках AdS/CFT-соответствия и их возможных физических приложений.

Найденные решения супергравитационного происхождения могут быть использованы в качестве фона при изучении движения суперструны. Решения типа $S0$-бран, соответствующие алгебрам Ли ранга 3, интересны в связи с их применением в космологии. Новые решения для 4-мерной модели с тремя скалярными полями, неуниверсально связанными с гравитацией, могут быть использованы для проверки гипотезы, введенной Ж-.М. Алими и А. Фюзфой (AWE-гипотеза) для описания темного сектора энергии в контексте обобщенной теории Бранса-Дикке.

Апробация работы.

Основные результаты диссертации докладывались на семинарах кафедры теоретической физики РУДН и российского гравитационного общества, а также апробировались на российских и международных конференциях и семинарах, таких как:

- Международная сессия-конференция Секции ядерной физики ОФН РАН «Физика фундаментальных взаимодействий», МИФИ, Москва, 2012;
- The 5th Strings, Cosmology and Gravity Student Conference (SCGSC), IHP, Paris, 2012;
- International Conference "Quantum Field Theory and Gravity (QFTG'12)", TSPU, Tomsk, 2012;
- XLVIII Всероссийская конференция по проблемам физики частиц, физики плазмы и конденсированных сред, оптоэлектроники, РУДН, Москва, 2012;
- The International Workshop "Supersymmetries and Quantum Symmetries (SQS'2011)", Dubna, 2011;
- IX International Workshop "Lie theory and its applications in Physics", IBAN, Varna, 2011;

- XLVI Всероссийская конференция по проблемам математики, информатики, физики и химии, РУДН, Москва, 2011;
- Международная конференция "Современные проблемы гравитации, космологии и релятивистской астрофизики", РУДН, Москва, 2010;
- II Российская школа-семинар по современным проблемам гравитации и космологии "GRACOS-2009", Казань-Яльчик, 2009;
- 13-я Российская гравитационная конференция - международная конференция по гравитации, космологии и астрофизике RUSGRAV-13, Москва, 2008;
- XLIV Всероссийская конференция по проблемам математики, информатики, физики и химии, РУДН, Москва, 2008.

Публикации.

По материалам диссертационной работы опубликовано 11 работ, в том числе 7 статей — в журналах из списка рекомендованных ВАК [1-7].

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, трех глав основного текста, заключения и трех приложений. Общий объем диссертации 135 страниц, рисунков — 14. Список литературы включает 125 наименований.

Содержание работы

Во **Введении** изложена актуальность диссертационной работы, приведен краткий обзор ранее полученных результатов по теме. Дано краткое содержание диссертации, сформулированы основные цели и задачи.

Первая глава основана на работах [1,3], которые посвящены исследованию суперсимметричных решений бозонного сектора одиннадцатимерной $\mathcal{N} = 1$ супергравитации. Фундаментальными объектами данной теории являются электрическая $M2$-брана и дуальная к ней магнитная $M5$-брана. Такие объекты переносят центральный заряд, что ведет к БПС ограничениям на энергетические плотности бран и сохранению части суперсимметрий. Метрика стандартного M-бранного решения может быть представлена в виде прямого произведения двух многообразий: мирового объема M-браны и поперечного пространства. Рассматриваются различные конфигурации трех ортогонально пересекающихся $M2$- и/или $M5$-бран (со стандартными пересечениями), определенные на произведении риччи-плоских многообра-

зий
$$M = M_0 \times M_1 \times \ldots \times M_n. \tag{1}$$
Эти решения выражаются через гармонические функции H_s, заданные на многообразии M_0, которое в данном случае является поперечным пространством.

Бергсхоеф с соавторами (E. Bergshoeff et al., Class. Quant. Grav., 1997) рассматривали суперсимметричные решения с пересекающимися M-бранами, определенные на произведении плоских фактор-пространств $M_i = \mathbb{R}^{k_i}$. Ими была представлена классификация таких БПС-решений и получены соотношения для вычисления доли сохраняющихся суперсимметрий
$$\mathcal{N} = 2^{-k}, \tag{2}$$
где $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Тем не менее, соотношения (2), вообще говоря, не будут выполняться, если М-бранные решения рассматриваются на произведении риччи-плоских многообразий. В этом случае число суперсимметрий $\mathcal{N}$ зависит от чисел киральных параллельных (т.е. ковариантно-постоянных) спиноров на каждом фактор-пространстве и знаковых множителей бран, которые определяют ориентацию мировых объемов бран.

Результат работ [1,3] состоит в том, что для суперсимметричных решений, описывающих пересечения трех M-бран: $M2 \cap M2 \cap M5$, $M2 \cap M5 \cap M5$ (две конфигурации), $M5 \cap M5 \cap M5$ (три конфигурации), получены соотношения для вычисления сохраняющихся суперсимметрий, которые обобщают результат (2) для топологически тривиальных плоских фактор-пространств. Случай пересечения трех электрических бран рассматривался ранее в работе В.Д. Иващука (V.D. Ivashchuk, IJGMMP, 2012).

Для получения соотношений искались решения обобщенного уравнения Киллинга
$$(D_M + B_M)\varepsilon = 0 \tag{3}$$
для 32-компонентного спинорного поля Майорана $\varepsilon = \varepsilon(z)$, определенного на многообразии (1). Здесь B_M — оператор, порожденный напряженностью поля 4-формы F, D_M — оператор спинорной ковариантной производной для метрики g на M
$$D_M = \partial_M + \frac{1}{4}\omega_{ABM}\hat{\Gamma}^A\hat{\Gamma}^B, \tag{4}$$
где $\omega^A{}_{BM}$ — спиновая связность, а реперные гамма-матрицы $\hat{\Gamma}^A$ удовлетворяют соотношениям алгебры Клиффорда
$$\hat{\Gamma}^A\hat{\Gamma}^B + \hat{\Gamma}^B\hat{\Gamma}^A = 2\eta^{AB}\mathbf{1}_{32}. \tag{5}$$

Композитные решения с M-бранами допускают спиноры, представленные в виде

$$\varepsilon = \left(\prod_{s\in S_e} H_s\right)^{-1/6} \left(\prod_{s\in S_m} H_s\right)^{-1/12} \eta, \tag{6}$$

где параллельный спинор η на многообразии (1)

$$\bar{D}^{(l)}_{m_l}\eta = 0 \quad \text{с} \quad \bar{D}^{(l)}_{m_l} = \partial_{m_l} + \frac{1}{4}\omega^{(l)}_{a_l b_l m_l}\hat{\Gamma}^{a_l}\hat{\Gamma}^{b_l}, \quad l = 0,\ldots,n, \tag{7}$$

удовлетворяет условиям сохранения суперсимметрии

$$\hat{\Gamma}_{[s]}\eta = c_s\eta, \quad s \in S. \tag{8}$$

Здесь множество индексов S, нумерующих браны, является объединением двух непересекающихся подмножеств S_e и S_m для электрических и магнитных бран, соответственно.

В (8) $c_s = \pm 1$ — знаковые константы бран, а $\hat{\Gamma}_{[s]}$ — операторы киральности, которые записываются так: для электрического случая

$$\hat{\Gamma}_{[s]} = \hat{\Gamma}^{A_1}\hat{\Gamma}^{A_2}\hat{\Gamma}^{A_3} \quad \text{для} \quad s \in S_e, \tag{9}$$

где три индекса A_1, A_2, A_3 описывают положение мирового объема s-ой $M2$-браны, и для магнитного случая

$$\hat{\Gamma}_{[s]} = \hat{\Gamma}^{B_1}\hat{\Gamma}^{B_2}\hat{\Gamma}^{B_3}\hat{\Gamma}^{B_4}\hat{\Gamma}^{B_5} \quad \text{для} \quad s \in S_m, \tag{10}$$

где пять индексов B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 описывают позицию, незанимаемую мировым объемом s-ой магнитной $M5$-браны. Для всех операторов киральности выполняется условие $(\hat{\Gamma}_{[s]})^2 = \mathbf{1}_{32}$ для любого s.

Таким образом, решения (6) обобщенных уравнений Киллинга определены решениями уравнений (7) с наложенными условиями на сохранение суперсимметрии (8). Размерность пространства решений уравнений (3) для ε, обозначаемая N, задает число сохраняемых суперсимметрий $\mathcal{N} = N/32$.

Необходимо отметить, что рассмотренные суперсимметричные конфигурации трех пересекающихся бран не могут быть описаны классификацией Бергсхоева и соавторов для плоских фактор-пространств $M_i = \mathbb{R}^{d_i}$, поскольку определены на произведении многообразий, которые включают риччи-плоские фактор-пространства (K3, pp-волну) и плоские многообразия с нетривиальной топологией ($\mathbb{C}^2_*/Z_2$, $\mathbb{R}^{1,1}_*/Z_2$, $(\mathbb{R}^{1,1}_*/Z_2)\times\mathbb{R}$). Также показано, что в двух случаях решений, описывающих пересечение трех магнитных бран $M5\cap M5\cap M5$, дробные числа суперсимметрий $\mathcal{N}$ зависят от значений знаковых констант бран $c_s = \pm 1$, т.е. при одной ориентации мирового объема бран $1/16$ часть суперсимметрий сохраняется, и полностью исчезает при другой.

Вторая глава основана на работах [4,6,7] и посвящена получению и исследованию решений флакс- и S-бранного типа для обобщенной p-бранной модели, заданной действием

$$S = \int d^D x \sqrt{|g|} \Big\{ R[g] - h_{\alpha\beta} g^{MN} \partial_M \varphi^\alpha \partial_N \varphi^\beta - \sum_{a\in\Delta} \frac{\theta_a}{n_a!} \exp[2\lambda_a(\varphi)] (F^a)^2 \Big\} \tag{11}$$

и определенной на произведении риччи-плоских фактор-пространств

$$M = (u_-, u_+) \times M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n. \tag{12}$$

При соответствующем выборе размерности D, ранга полей форм n_a и дилатонных векторов связи λ_a^α ($\lambda_a(\varphi) = \lambda_a^\alpha \varphi_\alpha$), действие (11) описывает усеченный бозонный сектор некоторой супергравитационной теории (без слагаемого Черна-Саймонса).

Анзац для метрики выглядит как

$$g = w e^{2\gamma(u)} du \otimes du + \sum_{i=1}^{n} e^{2\beta^i(u)} g^i, \tag{13}$$

где $w = \pm 1$, $g^i = g^i_{m_i n_i}(y_i) dy_i^{m_i} \otimes dy_i^{n_i}$ — метрика на многообразии M_i размерности d_i; $m_i, n_i = 1, \ldots d_i$; $i = 1, \ldots, n$. Все многообразия M_i являются риччи-плоскими $\mathrm{Ric}[g^i] = 0$.

Поля форм в (11) являются составными

$$F^a = \sum_{I\in\Omega_{a,e}} \mathcal{F}^{a,e,I} + \sum_{J\in\Omega_{a,m}} \mathcal{F}^{a,m,J}, \tag{14}$$

где элементарные формы электрического и магнитного типов записываются, соответственно, как

$$\mathcal{F}^{a,e,I} = d\Phi^{a,e,I} \wedge \tau(I), \quad \mathcal{F}^{a,m,J} = e^{-2\lambda(\varphi)} * \big(d\Phi^{a,m,J} \wedge \tau(J) \big). \tag{15}$$

Кратко изложен сигма-модельный подход получения решений в моделях с p-бранами, развитый в работах В.Д. Иващука и В.Н. Мельникова (V.D. Ivashchuk and V.N. Melnikov, Class. Quant. Grav., 1997). Согласно этому методу, полевые уравнения, соответствующие действию (11), в предположении, что тензор энергии-импульса имеет диагональный вид, а скалярные поля φ^α и Φ^s зависят только от одной координаты u, эквивалентны уравнениям движения для лагранжиана сигма-модельного типа

$$L_\sigma = \frac{1}{2} \mathcal{N} \hat{\mathcal{G}}_{AB}(X) \partial_u X^A \partial_u X^B, \quad \mathcal{N} > 0. \tag{16}$$

В работах [4, 6, 7] представлены частные решения, выделенные из общих решений типа p-бран

$$g = \Big(\prod_{s=1}^{n} H_s^{2h_s/(D-2)}\Big)\Big\{w d\rho \otimes d\rho + \Big(\prod_{s=1}^{n} H_s^{-2h_s}\Big)\rho^2 d\phi \otimes d\phi + g^2\Big\}, \qquad (17)$$

$$\exp(\varphi^\alpha) = \prod_{s=1}^{n} H_s^{h_s \lambda_s^\alpha}, \qquad (18)$$

$$F^s = -Q_s \left(\prod_{s'=1}^{n} H_{s'}^{-A_{ss'}}\right) \rho d\rho \wedge d\phi, \qquad (19)$$

где $(A_{ss'})$ — обобщенная матрица Картана, определяющая правила пересечения бран. Для таких решений многообразие (12) имеет вид

$$M = (0, +\infty) \times M_1 \times M_2, \qquad (20)$$

а формы F^s имеют ранг $n_s = 2$.

Управляющие функции $H_s(z) > 0$, $z = \rho^2$, в (17)-(19) являются решениями уравнений

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{H_s}\frac{d}{dz}H_s\right) = \frac{1}{4}B_s \prod_{s' \in S} H_{s'}^{-A_{ss'}} \qquad (21)$$

с наложенными граничными условиями

$$H_s(+0) = 1. \qquad (22)$$

В.Д. Иващуком была выдвинута гипотеза о существовании полиномиальных решений уравнений (21), (22), соответствующих полупростым конечномерным алгебрам Ли

$$H_s = 1 + \sum_{k=1}^{n_s} P_s^{(k)} z^k, \qquad (23)$$

где $P_s^{(k)}$ — некоторые постоянные, $k = 1, \ldots, n_s$, и $P_s^{(n_s)} \neq 0$ (V.D. Ivashchuk, Class. Quant. Grav., 2002). Степени полиномов n_s представляют собой удвоенные компоненты дуального вектора Вейля в базисе простых ко-корней. В работе [7] предложена программа по проверке данной гипотезы для всех серий классических алгебр Ли.

Для $w = +1$ и риччи-плоской метрики g^2, обладающей лоренцевой сигнатурой, решение (17)-(19) является многомерным обобщением решения Мелвина ($F1$-решение). Напомним, что решение Мелвина соответствует $D = 4$, $n = 2$, $M_1 = S^1$ $(0 < \phi < 2\pi)$, $M_2 = \mathbb{R}^2$, $g^2 = -dt \otimes dt + d\xi \otimes d\xi$ и алгебре Ли $\mathcal{G} = A_1$.

В случае, когда $w = -1$, $M_1 = \mathbb{R}$, $-\infty < \rho < +\infty$, и g^2 — риччи-плоская метрика евклидовой сигнатуры, решения (17)-(19) представляют собой космологические решения с горизонтом при $\rho = +0$ типа $S0$-бран.

Космологические решения (17)-(20) с тремя скалярными полями, связанные с алгебрами Ли ранга 3, исследованы на наличие ускоренного расширения трехмерного подпространства при достаточно малом значении вариации эффективной гравитационной постоянной. Показано, что для ускоренного расширения, по крайней мере, одно из скалярных полей должно иметь кинетический член с неправильным знаком.

В **третьей главе**, следуя работам [2,5,10], рассмотрена гравитационная модель с сигма-модельным источником для скалярных полей в произвольной размерности, определенная на произведении эйнштейновых фактор-пространств и заданная действием

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int_M d^D x \sqrt{|g|} \Big\{ R[g] - h_{ab}(\varphi) g^{MN} \partial_M \varphi^a \partial_N \varphi^b \Big\} + S_{YGH}, \tag{24}$$

где S_{YGH} — граничное слагаемое Йорка-Гиббонса-Хокинга. Такая модель описывает усеченный бозонный сектор различных супергравитационных теорий, возникающий при редукции к низшим размерностям. В соответствии с анзацем космологического типа для метрики и скалярных полей справедливо

$$g = w e^{2\gamma(u)} du \otimes du + \sum_{i=1}^{n} e^{2\beta^i(u)} g^i, \quad \varphi^a = \varphi^a(u), \tag{25}$$

где $w = \pm 1$, g^i является метрикой пространства Эйнштейна M_i, $i = 1, \ldots, n$. Показано, что эффективный лагранжиан для модели (24)-(25), записанный в гармонической калибровке $\gamma = \sum_{i=1}^{n} d_i \beta^i$, может быть представлен в виде суммы лагранжианов L_β и L_φ, соответствующих гравитационным и скалярным переменным. Таким образом, задача поиска решений космологического типа сводится к решению уравнений движения, соответствующих лагранжианам L_β и L_φ с наложенной энергетической связью

$$E = E_\beta + E_\varphi = 0, \tag{26}$$

где E_β и E_φ — интегралы энергии для гравитационной и скалярной систем, соответственно.

Найденное решение для метрики, когда все фактор-пространства являются риччи-плоскими, имеет вид

$$g = w \exp[2\sum_{i=1}^{n} d_i(v^i u + \beta_0^i)] du \otimes du + \sum_{i=1}^{n} \exp[2(v^i u + \beta_0^i)] g^i, \tag{27}$$

а скалярные поля удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d(h_{ab}(\varphi)\dot{\varphi}^b)}{du} - \frac{1}{2}\frac{\partial h_{cb}(\varphi)}{\partial \varphi^a}\dot{\varphi}^c\dot{\varphi}^b = 0, \tag{28}$$

$a = 1, \ldots, l$, с энергетической связью

$$E_\varphi = \frac{1}{2}h_{ab}(\varphi)\dot{\varphi}^a\dot{\varphi}^b = -\frac{1}{2}G_{ij}v^i v^j, \quad \text{где} \quad G_{ij} = d_i\delta_{ij} - d_i d_j. \tag{29}$$

Из класса решений (27)-(29) выделен подкласс решений казнеровского типа. Показано, что при определенных значениях параметров такие решения могут описывать ускоренное расширение 3-мерного фактор-пространства.

Получены общие решения в случае, когда одно из фактор-пространств выбрано многообразием Эйнштейна ненулевой кривизны, а остальные фактор-простраcтранства являются риччи-плоскими. Выражение для метрики имеет вид

$$g = |f|^{\frac{2d_1}{1-d_1}} \exp[2(v^1 u + \beta_0^1)] \left(w du \otimes du + f^2 g^1\right) + \sum_{i=2}^{n} \exp[2(v^i u + \beta_0^i)] g^i, \tag{30}$$

где $\xi_1 \neq 0$ — коэффициент пропорциональности между тензором Риччи и метрическим тензором для пространства Эйнштейна (M_1, g^1) ненулевой кривизны, u_0, C и β_0^i — константы, а функция f есть

$$f = \begin{cases} B\sinh(\sqrt{C}(u-u_0)), & C > 0, \quad w\xi_1 > 0; \\ |\xi_1(d_1-1)|^{1/2}(u-u_0), & C = 0, \quad w\xi_1 > 0; \\ B\sin(\sqrt{-C}(u-u_0)), & C < 0, \quad w\xi_1 > 0; \\ B\cosh(\sqrt{C}(u-u_0)), & C > 0, \quad w\xi_1 < 0, \quad \text{с} \quad B = \sqrt{\frac{|\xi_1(d_1-1)|}{|C|}}. \end{cases} \tag{31}$$

Решение для скалярных полей определено уравнениями геодезических (28) для пространства-мишени исходной сигма-модели с наложением энергетической связи

$$\frac{1}{d_1-1}(\sum_{i=2}^{n} d_i v^i)^2 + \sum_{i=2}^{n} d_i (v^i)^2 = \frac{C d_1}{(d_1-1)} - 2E_\varphi \geq 0. \tag{32}$$

Рассмотрены примеры пространств-мишеней, когда решения для скалярных полей могут быть получены точно: двумерная сфера $\mathbb{S}^2$, двумерное пространство де Ситтера dS^2, случай пространства-мишени с диагональной метрикой, в том числе пространство, соответствующее трехкомпонентной сигма-модели со скалярными полями, неуниверсально связанными с дилатонным полем. Последний пример представляет интерес в связи с так называемой AWE-гипотезой, основанной на подходе Дамура-Гиббонса-Гадлаха и выдвинутой Ж-.М. Алими и А. Фюзфой для описания темного сектора Вселенной (J.-M. Alimi and A. Füzfa, JCAP, 2008). В формализме обобщенной теории Бранса-Дикке действие такой модели в картине Йордана имеет вид

$$S = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-\tilde{g}}\left\{\Phi\tilde{R} - \frac{\omega_{BD}(M(\Phi))}{\Phi}\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi\right\} + \varepsilon_1 S_1[\psi_1, \tilde{g}_{\mu\nu}] + \varepsilon_2 S_2[\psi_2, M^2(\Psi)\tilde{g}_{\mu\nu}], \tag{33}$$

где $\tilde{g}_{\mu\nu}$ — метрика, $\tilde{R}$ — скалярная кривизна, Φ — фундаментальное скалярное поле Бранса-Дикке, $\omega_{BD}(\Phi)$ — функция связи Бранса-Дикке, $\psi_{1,2}$ — скалярные поля, описывающие обычную материю и темный сектор, соответственно, $\varepsilon_i = +1$ соответствует обычному скалярному полю, а $\varepsilon_i = -1$ — полю с отрицательным кинетическим членом, $i = 1, 2$. Картины Йордана и Эйнштейна связаны конформным преобразованием

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = A_1^2(\varphi)g_{\mu\nu} \tag{34}$$

и переопределением скалярного поля

$$3 + 2\omega_{BD} = \left(\frac{d\ln A_1(\varphi)}{d\varphi}\right)^{-2}, \quad M(\Phi) = \frac{A_2(\varphi)}{A_1(\varphi)}, \quad \Phi = A_1^{-2}(\varphi), \tag{35}$$

где $A_1(\varphi) \neq A_2(\varphi)$ — неминимальные функции связи. С помощью (34) и (35) действие (33) может быть записано в картине Эйнштейна. Гравитационные уравнения в этой картине тривиальны, а их решение для масштабного фактора имеет вид

$$a = a_0(3t + C)^{1/3}, \tag{36}$$

где a_0 и C — некоторые постоянные. Уравнения для скалярных полей соответствуют уравнениям движения для нелинейной трехкомпонентной сигма-модели с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}\left[\dot{\varphi}^2 + \varepsilon_1 A_1^2(\varphi)\dot{\psi}_1^2 + \varepsilon_2 A_2^2(\varphi)\dot{\psi}_2^2\right], \tag{37}$$

где гладкие функции связи выбраны в виде взаимообратных экспонент $A_1 = A_2^{-1} = e^{k_m\varphi}$ и k_m — дилатонная постоянная связи. Такой выбор функций связи ведет к интегрируемой модели цепочки Тода, связанной с аффинной алгеброй Ли $A_1^{(1)}$.

Решения для скалярных полей φ, ψ_1, ψ_2 определены квадратурами, соответственно,

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\bar{\varphi}}{\sqrt{2E_\varphi - \varepsilon_1 M_1^2 e^{-2k_m\bar{\varphi}} - \varepsilon_2 M_2^2 e^{2k_m\bar{\varphi}}}} = u + u_0, \tag{38}$$

$$\psi_k - \psi_k^0 = \int_{u_0}^{u} d\bar{u}\varepsilon_k M_k A_k^{-2}(\bar{u}), \quad k = 1, 2. \tag{39}$$

Вводя переобозначения $\bar{z} = e^{k_m\bar{\varphi}}$, $a = -\varepsilon_2 k_m^2 M_2^2$, $b = k_m^2 E_\varphi$, $c = -\varepsilon_1 k_m^2 M_1^2$, можно представить уравнение (38) в следующем виде

$$\int_{z_0}^{z} \frac{d\bar{z}}{\sqrt{a\bar{z}^4 + b\bar{z}^2 + c}} = u + u_0. \tag{40}$$

Известно, что решения (40) могут быть представлены в эллиптических функциях. Для различных наборов параметров a, b и c получены пять случаев решений в эллиптических функциях для скалярного поля φ, которые, учитывая конформное преобразование (34), определяют решения для масштабного фактора в картине Йордана.

Также из решения космологического типа (30)-(32) при $M_1 = \mathbb{S}^{d_1}$ выделено сферически-симметричное решение:

$$g = F^{b-1} dR \otimes dR + R^2 F^b g^1 + \sum_{i=2}^{n} F^{a_i} g^i, \tag{41}$$

где $R = R(u)$ — радиальная переменная, а управляющая функция записывается как

$$F = 1 - \frac{2\mu}{R^{d_1-1}}, \quad \mu = \frac{\sqrt{C}}{d_1 - 1} \quad \text{и} \quad d_1 > 1. \tag{42}$$

Здесь для постоянных b и a_i, $2 \leq i \leq n$, выполняются следующие соотношения

$$b = \frac{1}{d_1 - 1}\left(1 - \sum_{i=2}^{n} d_i a^i\right) \tag{43}$$

и

$$\frac{1}{d_1 - 1}\left(\sum_{i=2}^{n} d_i a_i\right)^2 + \sum_{i=2}^{n} d_i a_i^2 = \frac{d_1}{d_1 - 1} - e_\varphi \quad \text{с} \quad e_\varphi = 2\frac{E_\varphi}{C}. \tag{44}$$

Скалярные поля $\varphi^\alpha = \varphi^\alpha(R)$ удовлетворяют уравнениям

$$-\frac{d}{dR}\left(F(R)R^{d_1}h_{bc}(\varphi)\frac{d\varphi^b}{dR}\right) + \frac{1}{2}F(R)R^{d_1}h_{ab,c}(\varphi)\frac{d\varphi^a}{dR}\frac{d\varphi^b}{dR} = 0. \qquad (45)$$

Для данного сферически-симметричного решения сформулирована и доказана теорема о том, что при энергетическом параметре e_φ, принимающем значения в интервале

$$-\frac{d_1(D-1)}{D-d_1-1} < e_\varphi \le \frac{d_1}{d_1-1}, \qquad (46)$$

решения типа черных дыр возможны только в случае постоянных скалярных полей.

Предложение. *Пусть g — метрика заданная в (41) с параметрами b, a_i, удовлетворяющими соотношениям (43), (44), $a_2 \ne 0$ и $-\frac{d_1(D-1)}{D-d_1-1} < e_\varphi \le \frac{d_1}{d_1-1}$. Пусть также для любой из метрик g^i, $i = 3, ..., n$, квадрат тензора Римана ограничен снизу $R_{m_i n_i p_i q_i}R^{m_i n_i p_i q_i}[g^i] \ge C_i$. Тогда, регулярный горизонт метрики (41) в точке $R = R_0$ имеет место тогда и только тогда, когда*

$$a_2 - 1 = a_3 = ... = a_n = e_\varphi = 0. \qquad (47)$$

Данная теорема находится в согласии с теоремой об "отсутствии волос", доказанной К.А. Бронниковым с соавторами (K.A. Bronnikov et al., Gen. Rel. Grav., 2003), для $(2 + d_1)$-мерного сечения метрики и $e_\varphi \ge 0$.

В **Заключении** сформулированы основные положения, выносимые на защиту:

1. Исследованы суперсимметричные конфигурации из трех ортогонально пересекающихся M-бран, определенные на произведении риччи-плоских пространств в теории 11-мерной $\mathcal{N} = 1$ супергравитации: $M2 \cap M2 \cap M5$, $M2 \cap M5 \cap M5$ (два случая пересечений), $M5 \cap M5 \cap M5$ (три случая пересечений). Найдены соотношения для подсчета сохраняющихся суперсимметрий, обобщающие соотношения Бергсхоефа для плоских топологически тривиальных фактор-пространств $\mathbb{R}^{d_i}$. Получены новые примеры суперсимметричных решений, содержащие такие фактор-пространства как K3-поверхности, пространство $\mathbb{C}^2_*/Z_2$, 4-мерное многообразие типа *pp*-волны и псевдоевклидово пространство $\mathbb{R}^{1,1}_*/Z_2$.

2. Для D-мерной ($D \ge 3$) модели супергравитационного происхождения с сигма-модельным источником, определенной на произведении

n эйнштейновых фактор-пространств, получены решения космологического типа, когда $(n-1)$ фактор-пространств являются риччи-плоскими. Показано, что при некотором выборе параметров найденные космологические решения могут описывать ускоренное расширение трехмерного фактор-пространства. Найдены решения в эллиптических функциях для четырехмерной обобщенной модели Бранса-Дикке с тремя скалярными полями, неуниверсально связанными с гравитацией.

3. На основе найденных решений космологического типа получен, при $D \geq 4$, подкласс сферически-симметрических решений, определенных на произведении нескольких риччи-плоских фактор-пространств и пространства $\mathbb{S}^{d_1}$, $d_1 > 1$. Доказано, что при ограничении снизу на энергетический параметр $e_\varphi : e_\varphi > e_{\varphi_0}$, $e_{\varphi_0} < 0$, и квадраты тензоров Римана для внутренних фактор-пространств, решения с регулярным горизонтом возможны только в случае постоянных значений скалярных полей. Выделено семейство солитоноподобных решений, для которых пост-ньютоновские параметры 4-мерного сечения метрики совпадают со шварцшильдовыми.

4. Найдены решения флаксбранного типа, обобщающие решение Мелвина и связанные с полупростыми конечномерными алгебрами Ли, для модели, заданной обобщенным p-бранным действием, включающим n полей форм и l скалярных полей, и определенной на произведении риччи-плоских фактор-пространств. Такие решения определяются с точностью до полиномиальных функций, являющихся решениями системы нелинейных дифференциальных уравнений, эквивалентных цепочкам Тоды с наложенными граничными условиями. Написана программа для вычислений полиномов, соответсвующих как классическим сериям алгебр Ли, так и исключительным алгебрам G_2, F_4 и E_6. Построены $S0$-бранные решения, связанные с алгебрами Ли ранга 3: A_3, B_3, C_3. Показано, что для подкласса решений с тремя скалярными полями возможно ускоренное расширение трехмерного подпространства M_1 при наличии малой вариации эффективной гравитационной постоянной. Выделен подкласс решений с экспоненциальным расширением M_1.

Список публикаций

[1] A.A. Golubtsova and V.D. Ivashchuk. Triple M-brane configurations and supersymmetries// Nuclear Physics B. — 2013. — Vol. 872, no. 3. — Pp. 289-312.

[2] A.A. Golubtsova and V.D. Ivashchuk. Exact solutions in gravity with a sigma model source// General Relativity and Gravitation. — 2012. — Vol. 44, no. 10. — Pp. 2571 - 2594.

[3] A.A. Golubtsova and V.D. Ivashchuk. Triple M-brane solutions and supersymmetry// Tomsk State Pedagogical University Bulletin. — 2012. — Vol. 128, № 13. — Pp. 53 - 58.

[4] A.A. Golubtsova and V.D. Ivashchuk. Fluxbrane and S-brane solutions related to Lie algebras// Physics of Particles and Nuclei. — 2012. — Vol. 43, no. 5. — Pp. 720 - 722.

[5] А.А. Голубцова, В.Д. Иващук. О космологических решениях с сигма-модельным источником // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2012. — Вып. 3. — Стр. 115 – 128.

[6] A.A. Golubtsova. On multidimensional cosmological solutions with scalar fields and 2-forms corresponding to rank-3 Lie algebras: acceleration and small variation of G// Gravitation and Cosmology. — 2010. — Vol.16, no. 4. — Pp. 298 - 306.

[7] A.A. Golubtsova and V.D. Ivashchuk. On multidimensional analogs of Melvin's solution for classical series of Lie algebras// Gravitation and Cosmology. — 2009. — Vol.15, no. 2. — Pp. 144-147.

Материалы международных научных конференций

[8] А.А. Голубцова, В.Д. Иващук. М-браны на произведении риччи-плоских пространств и дробные суперсимметрии// Международная сессия-конференция Секции ядерной физики ОФН РАН "Физика фундаментальных взаимодействий". Тезисы докладов. — М.: НИЯУ МИФИ. — 2012. — Стр. 50.

[9] A.A. Golubtsova. Composite M-branes on the product of Ricci-flat manifolds// The 5th Strings, Cosmology and Gravity Student Conference (SCGSC). — Paris. — 2012. — Pp. 8.

[10] J.-M. Alimi, A. Füzfa and A.A. Golubtsova. The Cosmological Dynamics of the AWE Hypothesis// 14-я Российская Гравитационная Конференция. Тезисы докладов. — Ульяновск: Издательство Российского университета дружбы народов. — 2011. — Стр. 131.

[11] A.A. Golubtsova. Exact solutions corresponding to Lie algebras in multidimensional gravity theories of string origin// IX International Workshop Lie theory and its applications in Physics. — Varna.— 2011. — Pp. 14.

АННОТАЦИЯ

Голубцова Анастасия Андреевна
Точные решения в теориях гравитации и супергравитации и сохраняющиеся суперсимметрии

Получены соотношения для вычисления сохраняющихся долей суперсимметрий для конфигураций из трех M-бран. Найдены примеры суперсимметричных конфигураций, содержащие такие фактор-пространства как K3, $\mathbb{C}^2_*/Z_2$, 4-мерное многообразие pp-волны и двумерное псевдоевклидово многообразие $\mathbb{R}^{1,1}_*/Z_2$.

Найдены обобщенные решения Мелвина, связанные с полупростыми алгебрами Ли. Выделен подкласс $S0$-бранных решений, соответствующих алгебрам Ли ранга 3 и описывающих ускоренное расширение 3-мерного подпространства, совместимое с достаточно малым значением вариации гравитационной постоянной.

Для D-мерной гравитационной модели с сигма-модельным источником получены решения в случаях когда: 1) все фактор-пространства являются риччи-плоскими; 2) одно из фактор-пространств имеет ненулевую кривизну, а остальные являются риччи-плоскими; 3) модель рассматривается в контексте 4-мерной обобщенной теории Бранса-Дикке. Исследован подкласс сферически-симметричных решений. Сформулирована и доказана теорема об “отсутствии волос” для черных дыр.

ABSTRACT

Golubtsova Anastasia Andreevna
Exact solutions in gravity and supergravity and preserved supersymmetries

The explicit formulae for computing the amounts of preserved supersymmetries for triple M-brane configurations are obtained. Certain examples of the supersymmetric configurations containing such factor-spaces as K3, $\mathbb{C}^2_*/Z_2$, a four dimensional pp-wave manifold and two-dimensional pseudo-Euclidean manifold $\mathbb{R}^{1,1}_*/Z_2$ are presented.

Generalized Melvin's solutions related to semi-simple Lie algebras are obtained. A subslass of S-brane solutions corresponding to Lie algebras rank 3 is singled out, for which there exists a time interval where an accelerated expansion of a 3-dimensional subspace is compatible with a small enough value of the variation of the gravitational constant.

For a D-dimensional gravitational model with a sigma-model source term general cosmological type solutions are obtained in the cases: 1) when all factor spaces are Ricci-flat; 2) when one factor space has nonzero scalar curvature and other are Ricci-flat; 3) for a $4D$ model of the generalized Brans-Dicke theory. A subclass of spherically symmetric solutions is studied. The “no-hair theorem” for black holes is formulated and proved.